Задача № 137

Заряд $q = -5 \cdot 10^{-7}$ *Кл* равномерно распределен по всему объему однородного сферического диэлектрика (*ε=3*) радиусом *R=5,0 см*.

Построить графики функций $f_1 = \varphi_1(r)$ и $f_2 = \varphi_2(r)$ для случаев:

1) $r \le R$: 2) $r \ge R$

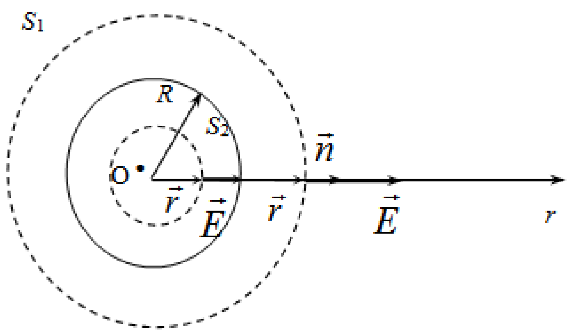
Вычислить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между точками $r_1 = 1 см$ и $r_2 = 8 см$

Дано: $q = -5 \cdot 10^{-7}$ *Кл*, *ε=3*, *R=5см=0,05 м*, $r_1 = 1 см = 0,01 м$, $r_2 = 8 см = 0,08 м$,

1) $r \le R$: 2) $r \ge R$

Найти: 1) $f_1 = \varphi_1(r)$; $f_2 = \varphi_2(r)$; 2) $\Delta\varphi = ?$

Рисунок:



Физический смысл имеет только разность потенциалов, и если в задаче требуется найти значение потенциала в некоторой точке, то предполагается, что его значение в другой точке известно. Такой общепринятой во многих случаях является точка, бесконечно удаленная от заряженного объекта (*r → ∞),* где потенциал полагается равным нулю. Значение же его в центре шара зависит от характера распределения заряда. Поскольку этот характер различен внутри и вне шара, необходимо решать последовательно внешнюю задачу (чтобы найти потенциал на поверхности шара), а затем – внутреннюю. Поле однородно заряженного шара центрально-симметрично, т.е. вектор напряженности выражается через радиус - вектор r, как: $\vec{E} = E(r)\frac{r}{r}$ (см. рис.).

В таком поле потенциал связан с напряженностью соотношением: $E_r = -\frac{d\varphi}{dr}$. Получим выражение для напряженности.

Для этого воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса:

$\oint_S \left(\vec{E}\ d\vec{S}\right) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$ и запишем выражение для потока вектора E через концентрическую с шаром сферическую поверхность S_1 некоторого радиуса $r > R$:

$$\Phi = \oint_{S_1}\left(\vec{E}\ d\vec{S}\right) = \oint_{S_1}\left(E(r)\frac{r}{r}\ \vec{n}dS\right) = \oint_{S_1} E(r)dS = E(r)\cdot 4\pi r^2 \qquad (1)$$

Здесь учтено, что скалярное произведение вектора $\frac{r}{r}$ на единичный вектор нормали n к сферической поверхности $\left(\frac{r}{r}\ \vec{n}\right) = 1$. Поверхность S_1 охватывает весь заряженный шар, тогда:

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (2)$$

Итак, для $r > R$ получаем: $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$, (3)

Откуда: $$d\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr \qquad (4)$$

В результате интегрирования в пределах от точки с произвольным r до точки $r \to \infty$, где $\varphi = 0$, получаем:

$$\int_{\varphi}^{0} d\varphi = -\int_{r}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr \qquad (5)$$

или: $$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \qquad (6)$$

В частности, при $r \to R$ получаем: $\varphi(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$ (7)

Теперь при решении внутренней задачи точка на поверхности шара ($r = R$) будет выступать как точка с известным значением потенциала, задаваемым формулой (7).

Опять рассмотрим сферическую поверхность S_2, построенную теперь уже внутри шара, т.е. $r<R$. Поток вектора напряженности через нее по-прежнему выражается формулой (1). Но охваченный ею заряд q' меньше заряда шара q. При постоянной объемной плотности заряда ρ:

$$q' = \rho(4/3)\pi r^3, \quad q = \rho(4/3)\pi R^3. \qquad (8)$$

Исключая ρ, получим: $$q' = q\frac{r^3}{R^3} \qquad (9)$$

Тогда согласно формуле $\oint_S \left(\vec{E}\, d\vec{S}\right) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$ получаем:

$$4\pi r^2 E = \frac{qr^3}{\varepsilon\varepsilon_0 R^3} \qquad (10)$$

Итак, для $r < R$ получаем: $$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^3} r \qquad (11)$$

Заметим, что при $r = R$ формулы (3) и (11) дают одинаковое значение:

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} \qquad (12)$$

Тогда потенциал равен: $$d\varphi = -Edr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^3} rdr \qquad (13)$$

Интегрируя в пределах от произвольного r до R, получаем:

$$\varphi(R) - \varphi = \frac{q}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^3}\left(r^2 - R^2\right) \qquad (14)$$

Подставляя $\varphi(R)$ из (7), после преобразований получаем *зависимость потенциала от координаты внутри шара*:

$$\varphi(r) = \frac{3q}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) \qquad (15)$$

В частности, при $r = 0$, т.е. в центре шара по формуле (15):

$$\varphi(0)=\frac{3q}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}=\frac{3\cdot 5\cdot 10^{-7}}{8\pi\cdot 3\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 0,05}=45\cdot 10^3\,B=45\,\kappa B$$

где $\varepsilon_0=8,85\cdot 10^{-12}\,\Phi/\mathit{м}$ - электрическая постоянная.

При $r=r_1=1\,\mathit{см}$ по формуле (15):

$$\varphi(r_1)=\frac{3\cdot 5\cdot 10^{-7}}{8\pi\cdot 3\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 0,05}\left(1-\frac{(0,01)^2}{3\cdot(0,05)^2}\right)=44,4\cdot 10^3\,B=44,4\,\kappa B$$

При $r=R$ по формуле (15):

$$\varphi(R)=\frac{3q}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{R^2}{3R^2}\right)=\frac{3\cdot 5\cdot 10^{-7}}{8\pi\cdot 3\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 0,05}\cdot\frac{2}{3}=30\cdot 10^3\,B=30\,\kappa B$$

Для точек вне шара $r>R$, которые находятся в вакууме, потенциал поля будет определяться как:

$$\varphi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-R)} \qquad (16)$$

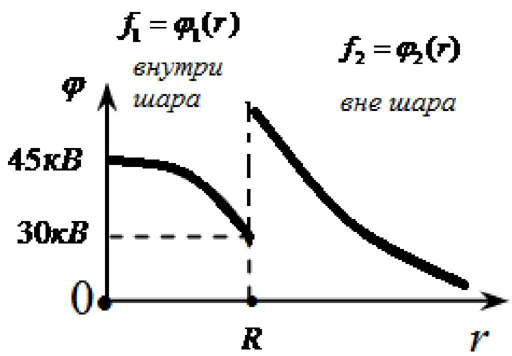
Найдем потенциал для точки $r_2=8\,\mathit{см}$:

$$\varphi(r_2)=\frac{5\cdot 10^{-7}}{4\pi\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot(0,08-0,05)}=149,9\cdot 10^3\,B=149,9\,\kappa B$$

Найдем разность потенциалов $\Delta\varphi$ между точками r_1 и r_2:

$$\Delta\varphi=\varphi(r_2)-\varphi(r_1)=149,9\kappa B-44,4\kappa B=105,5\,\kappa B$$

Построим **графики функций** $f_1=\varphi_1(r)$ и $f_2=\varphi_2(r)$ для обоих случаев:



Ответ: $\Delta\varphi=105,5\,\kappa B$